Appunti di Matematica per il III LICEO

Settimana dal 09/03/2020 al 13/03/2020

Lunedì 9 - Esercizi

Svolgere i seguenti esercizi.

1. Data l'equazione dell'iperbole $3x^2 - 2y^2 = -12$, determinare la misura del semiasse trasverso, le coordinate dei vertici e dei fuochi, le equazioni degli asintoti, l'eccentricità e rappresentarla graficamente.

2. Stabilire la posizione reciproca tra l'iperbole di equazione $x^2 - 4y^2 = 20$ e la retta $3x + 2y = 0$.

Martedì 10 - Esercizi

Svolgere i seguenti esercizi.

1. Data l'equazione dell'iperbole $x^2 - 4y^2 = 25$, determinare la misura del semiasse trasverso, le coordinate dei vertici e dei fuochi, le equazioni degli asintoti, l'eccentricità e rappresentarla graficamente.

2. Stabilire la posizione reciproca tra l'iperbole di equazione $3x^2 - 8y^2 = -5$ e la retta $x - 4y + 5 = 0$.

Giovedì 12 - Teoria

Iperbole equilatera

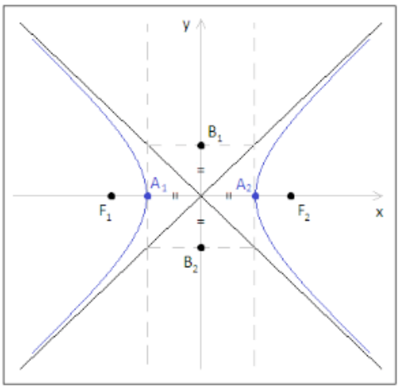
Se nell'equazione canonica $a = b$, l'iperbole si dice equilatera.

Se i fuochi sono sull'asse x, l'equazione dell'iperbole equilatera è:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \rightarrow \quad x^2 - y^2 = a^2 \,.$$

Se i fuochi sono sull'asse y, l'equazione dell'iperbole equilatera è:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1 \quad \rightarrow \quad x^2 - y^2 = -a^2 \,.$$



Essendo $2a = 2b$, il rettangolo che ha lati paralleli all'asse trasverso e a quello non trasverso diventa un quadrato. Le equazioni degli asintoti sono

$$y = x \,, \quad y = -x \,;$$

essi coincidono quindi con le bisettrici dei quadranti.

La semidistanza focale dell'iperbole equilatera è

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

e l'eccentricità vale

$$e = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \,.$$

Esercizio: data l'equazione dell'iperbole $x^2 - y^2 = -36$, determinare la misura del semiasse trasverso, le coordinate dei vertici e dei fuochi, le equazioni degli asintoti, l'eccentricità e rappresentarla graficamente.

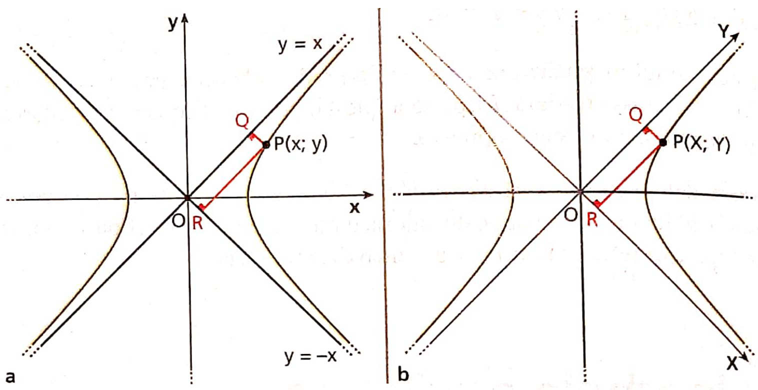
L'iperbole equilatera riferita agli asintoti

Nell'iperbole equilatera riferita agli asintoti, gli assi e gli asintoti stessi coincidono; l'equazione dell'iperbole è

$$xy = k\,, \quad \text{con } k > 0 \text{ costante.}$$

Dall'equazione si ha $y = k/x$, quindi tra le variabili x e y c'è *proporzionalità inversa* e k è la costante di proporzionalità.

Per dimostrare che la formula è quella data, osserviamo che, nell'iperbole equilatera, gli asintoti $y = x$ e $y = -x$ sono perpendicolari tra loro: possiamo quindi prenderli come assi di riferimento (chiamandoli asse X e Y). Sia quindi Oxy il sistema di riferimento orignario e OXY quello ottenuto prendendo come assi le bisettrici dei quadranti.



Sia ora P un generico punto dell'iperbole e siano le sue coordinate $(x; y)$ nel sistema Oxy e $(X; Y)$ nel sistema OXY. Andiamo a calcolare la distanza di P dai due asintoti, utilizzando la formula della distanza tra un pnto e una retta. Nel sistema di riferimento Oxy, si ha

$$
\begin{aligned}
\overline{PQ} &= \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}\,, \\
\overline{PR} &= \frac{|x+y|}{\sqrt{2}}\,, \\
\overline{PQ}\cdot\overline{PQ} &= \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{2}} = \frac{|x^2-y^2|}{2} = \frac{a^2}{2}\,.
\end{aligned}
$$

In OXY si ha invece

$$
\begin{aligned}
\overline{PQ} &= |X|\,, \\
\overline{PR} &= |Y|\,, \\
\overline{PQ}\cdot\overline{PQ} &= |X|\cdot|Y| = |XY|\,.
\end{aligned}
$$

Uguagliando i due risultati ottenuti, si ha

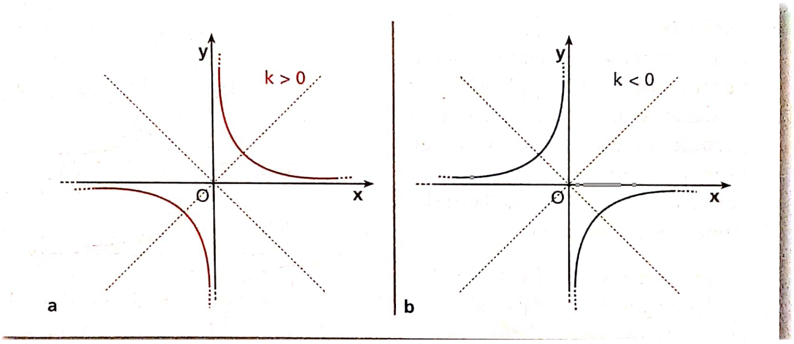
$$
|XY| = \frac{a^2}{2}\,,
$$

cioè

$$
XY = \pm\frac{a^2}{2}\,;
$$

l'uguaglianza vale con il segno positivo nel primo e terzo quadrante, dove X e Y hanno lo stesso segno, e negativo nel secondo e quarto quadrante, dove hanno segno opposto. Rinominando la costante al secondo membro con k, si ottiene l'equazione cercata.

Mostriamo nella seguente figura i due casi possibili.



Gli assi di simmetria sono le bisettrici dei quadranti, quindi i fuochi e i vertici apparterranno a tali rette. Le coordinate dei vertici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} xy = k \\ y = x \end{cases}$$

se $k > 0$ e del sistema

$$\begin{cases} xy = k \\ y = -x \end{cases}$$

se $k < 0$. Per $k > 0$, si ottiengono quindi i vertici di coordinate

$$A_1(-\sqrt{k}; -\sqrt{k}) \text{ e } A_2(\sqrt{k}; \sqrt{k})$$

per $k < 0$, invece, si ottiene

$$A_1(-\sqrt{-k}; \sqrt{-k}) \text{ e } A_2(\sqrt{-k}; -\sqrt{-k}) \,.$$

Le coordinate dei fuochi sono

$$F_1(-\sqrt{2k}; -\sqrt{2k}) \text{ e } F_2(\sqrt{2k}; \sqrt{2k})$$

per $k > 0$ e

$$F_1(-\sqrt{-2k}; \sqrt{-2k}) \text{ e } F_2(\sqrt{-2k}; -\sqrt{-2k})$$

per $k < 0$.