MATEMATICA

"IPS Paolo Segneri"

Classe IV AFM Sez. A

Settimana dal 09/03 al 13/03

Esercizi sulle Funzioni.

Svolgere i seguenti esercizi sulle funzioni, determinando:

- Dominio;
- Simmetrie (pari o dispari);
- Intersezioni con gli assi;
- Segno;
- Limiti;
- Grafico.

L'esercizio 1 è svolto, così avrete un esempio da seguire.

Buon Lavoro!

Esercizio 1)

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$$

1) DOMINIO:

$x-3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3 \rightarrow D = \mathbb{R} - \{3\}$

2) SIMMETRIE: $f(-x) = \frac{-2x-1}{-x-3}$ $\neq f(x)$ NO pari; $\neq -f(x)$ NO dispari

3) **INTERSEZIONI CON GLI ASSI:**

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \underline{\left(0;\frac{1}{3}\right) \in f(x)}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ \frac{2x-1}{x-3}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ 2x-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \underline{\left(\frac{1}{2},0\right) \in f(x)}$$

4) **SEGNO:**

$$f(x)\geq 0 \rightarrow \frac{2x-1}{x-3}\geq 0$$

$N \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

$D > 0 \rightarrow x > 3$

		$\frac{1}{2}$		3	
N	$-$	$\bullet$	$+$		$+$
D	$-$		$-$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$	$+$	$\bullet$	$-$	$\emptyset$	$+$

$$\begin{cases} f(x)\geq 0 \rightarrow x\leq \frac{1}{2} \ \vee \ x>3 \\ f(x)<0 \rightarrow \frac{1}{2}<x<3 \end{cases}$$

5) **LIMITI:**

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x}(2-\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x}})}{\cancel{x}(1-\underset{0\swarrow}{\frac{1}{x}})} = 2$$

$\underline{y=2}$ Asintoto orizzontale

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$\underline{x=3}$ Asintoto verticale

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

Esercizio 2)

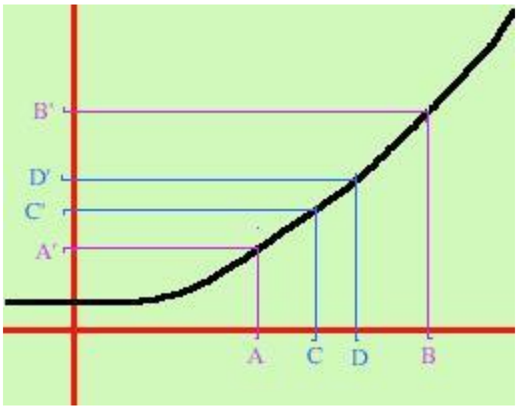
$$f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

Esercizio 3)

$$f(x)=\sqrt{x^2-9}$$

Teoria: I limiti

Teoricamente il limite e' una cosa molto semplice: se io considero un piccolo intervallo sull'asse delle x ad esso corrispondera' un intervallo piu' o meno piccolo sull'asse delle y; se quando restringo l'intervallo sull'asse delle x mi si restringe anche l'intervallo corrispondente sull'asse delle y allora ho un limite.



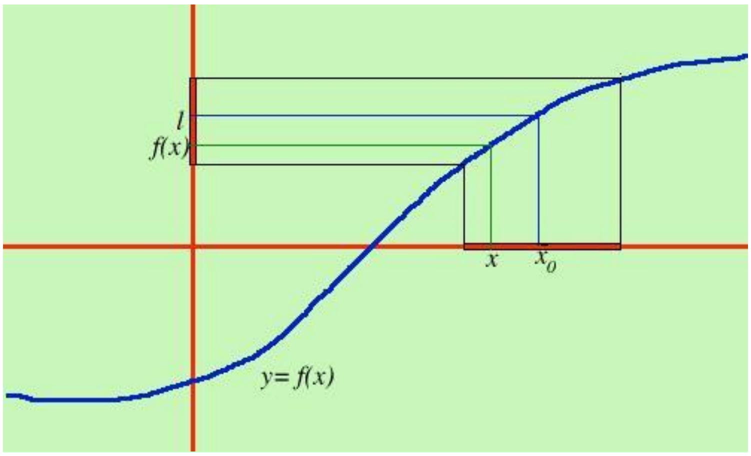
In figura all'intervallo in viola AB corrisponde l'intervallo in viola A'B' ed all'intervallo piu' piccolo in blu CD corrisponde un intervallo piu' piccolo in blu C'D'.

Allora posso avvicinarmi ad un punto quanto voglio: basta rendere sempre piu' piccolo l'intervallo sulle x Poiche' l'intervallo posso renderlo piccolo quanto voglio allora posso sostituirlo al concetto di punto Il problema e' tradurre un concetto cosi' semplice in linguaggio matematico.

Limite finito di una funzione in un punto

Il concetto espresso nella pagina precedente e' abbastanza comprensibile, diventa piu' complicato l'esprimerlo in forma matematica.

Per prima cosa, siccome si parla di limite di una funzione e la funzione è come variano i punti sull'asse y partiremo da un intervallo sull'asse y e diremo che allo stringersi di un intervallo sulle y avvicinandosi ad un valore l si stringe anche l'intervallo corrispondente sulle x avvicinandosi ad x0.



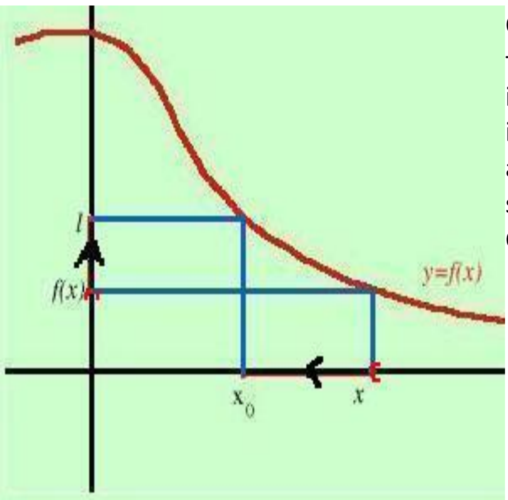
Per dire questo consideriamo sull'intervallo delle X (quello marcato piu' scuro) un qualunque punto x a cui corrisponde f(x) sull'asse Y. Per rendere piccoli gli intervalli bastera' dire che deve essere piccola la distanza tra f(x) ed l e contemporaneamente la distanza tra x ed x 0; ora la distanza si ottiene facendo la differenza fra le coordinate, ma essendo sempre positiva, dovra' essere presa in modulo.
Quindi bastera' dire che quando la distanza sulle Y e' minore di un numero piccolissimo anche la distanza sulle X dovra' essere minore di un numero piccolissimo, od in modo equivalente quando f(x) si avvicina ad l anche x si avvicina ad x0.

Ora siamo pronti a dare la definizione matematica:

Si dice che la funzione y=f(x) ammette limite finito l per x tendente ad x0 e si scrive:
limx->x0 f(x)=l
se per ogni numero positivo ϵ (epsilon) piccolo a piacere esiste un numero δ_ϵ (delta epsilon cioe' delta dipendente da epsilon) tale che da
|f(x)-l|< ϵ segua |x-x0 | < δ_ϵ

Limite destro e limite sinistro

Per capire bene il concetto di limite destro (sinistro) consideriamo cos'e' un intervallo per un punto interno: e' un intorno e per essere un intorno non e' necessario che il punto sia al centro dell'intervallo, anzi il punto puo' essere spostato anche fino al bordo se l'intervallo e' chiuso ed in tal caso avremo un intorno destro o sinistro del punto.



Ora quando considero il limite limx->x0 f(x)=l invece di considerare tutto un intervallo che contenga x0 possiamo considerarne un intorno destro (sinistro) ed in tal caso sull'asse y corrispondera' un intorno destro o sinistro di l ma cio' non cambiera' nulla: infatti allo stringersi dell'intervallo sull'asse delle y corrispondera' lo stringersi dell'intorno sull'asse delle x.
Cioe' quando f(x) si avvicina ad l x si avvicina ad x0

Definizione matematica:

Si dice che la funzione y=f(x) ammette limite finito destro l per x tendente ad x 0+ e si scrive: limx->x0+ f(x)=l se esiste un numero positivo ϵ (epsilon) piccolo a piacere tale che da |f(x)-l|< ϵ segua x-x0 < $\delta \epsilon$ (delta epsilon cioe' delta dipendente da epsilon).