Appunti di Matematica per il IV LICEO

Settimana dal 09/03/2020 al 13/03/2020

Esercizi

Svolgere i seguenti esercizi.

1. Risolvere il triangolo ABC, rettangolo in A, noto $b = 8$ e $c = 8\sqrt{3}$
2. In una circonferenza di raggio 20 cm calcolare la lunghezza della corda, sapendo che l'angolo al centro che insiste su di essa ha ampiezza di 120 gradi.
3. Del triangolo ABC sono noti $a = 12$, $b = 9$ e $\beta = 30°$. Calcolare il $\sin \alpha$.
4. Del triangolo ABC sono noti $c = 20$, $b = 9$ e $\gamma = 120°$. Calcolare il $\sin \beta$.
5. Del triangolo ABC sono noti $a = 12$, $b = 6$ e $\gamma = 30°$. Calcolare la lunghezza di c.
6. Del triangolo ABC sono noti $a = \sqrt{56}$, $b = 10$ e $c = 6$. Calcolare il $\cos \alpha$.

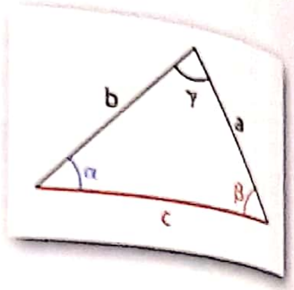
Teoria

Studiare le pagine seguenti.

Possiamo utilizzare il teorema dei seni e il teorema del coseno.
Esaminiamo i quattro possibili casi.

Sono noti un lato e due angoli

Conoscendo c, α e β, vogliamo determinare γ, a e b.



Determiniamo $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.
Per il teorema dei seni:

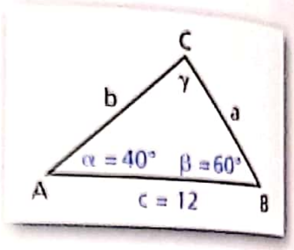
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \rightarrow a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Ancora per il teorema dei seni:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}.$$

ESEMPIO

Sono noti $c = 12$, $\alpha = 40°$ e $\beta = 60°$.
Ricaviamo γ:



$$\gamma = 180° - (40° + 60°) = 80°.$$

Per il teorema dei seni:

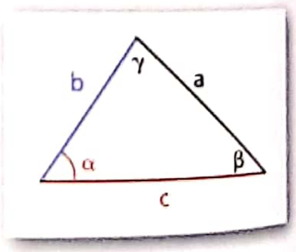
$$\frac{a}{\sin 40°} = \frac{12}{\sin 80°} \rightarrow a = \frac{12 \cdot \sin 40°}{\sin 80°} \simeq \frac{12 \cdot 0,64279}{0,9848} \simeq 7,83.$$

Ancora per il teorema dei seni:

$$\frac{b}{\sin 60°} = \frac{12}{\sin 80°} \rightarrow b = \frac{12 \cdot \sin 60°}{\sin 80°} \simeq \frac{12 \cdot 0,866}{0,9848} \simeq 10,55.$$

Sono noti due lati e l'angolo fra essi compreso

Conosciamo b, c e α; determiniamo β, γ e a.
Determiniamo a mediante il teorema del coseno:



$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}.$$

Applichiamo nuovamente il teorema del coseno per calcolare β:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \rightarrow 2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - b^2 \rightarrow \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Troviamo quindi β utilizzando la funzione arcocoseno.
Infine determiniamo $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.
Per calcolare β abbiamo usato il teorema del coseno, invece del teorema dei seni, perché, se determiniamo un angolo conoscendo il valore del suo coseno, allora l'angolo che otteniamo è unico. Infatti l'equazione

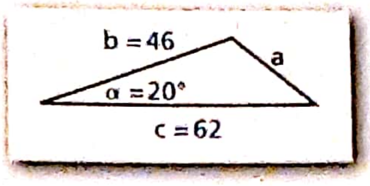
$$\cos x = k, \quad \text{con } -1 \le k \le 1,$$

ha un'unica soluzione se $0° < x < 180°$, mentre

$$\sin x = k$$

ha due soluzioni se $0° < x < 180°$.
Quindi, se si calcola un angolo conoscendo il valore del suo seno, si ottengono due soluzioni di cui si dovrà poi verificare l'accettabilità.

ESEMPIO
Sono noti $b = 46$, $c = 62$ e $\alpha = 20°$.



Applichiamo il teorema del coseno per calcolare a:

$$a = \sqrt{46^2 + 62^2 - 2 \cdot 46 \cdot 62 \cdot \cos 20°}$$

$$a \simeq \sqrt{2116 + 3844 - 5704 \cdot 0{,}93969} \simeq \sqrt{600{,}0082} \rightarrow a \simeq 24{,}50.$$

Applichiamo il teorema del coseno per calcolare β:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \rightarrow 46^2 = 24{,}5^2 + 62^2 - 2 \cdot 24{,}5 \cdot 62 \cdot \cos\beta,$$

$$\cos\beta \simeq 0{,}77 \rightarrow \beta \simeq 40°.$$

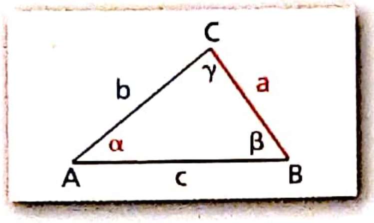
$$\gamma \simeq 180° - (20° + 40°) = 120°.$$

▶ Risolvi il triangolo ABC di cui sono dati $a = 25$, $c = 38$, $\beta = 45°$.
[$b \simeq 26{,}94$, $\alpha \simeq 41°$, $\gamma \simeq 94°$]

Animazione

Sono noti due lati e l'angolo opposto a uno di essi

Consideriamo il triangolo ABC e supponiamo noti a, b e α. Vogliamo conoscere β, γ e c.
Applichiamo il teorema dei seni per calcolare β:



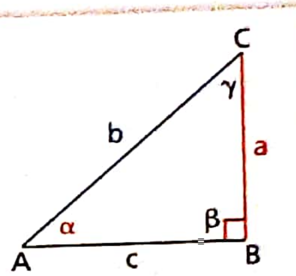
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \quad \rightarrow \quad \sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha.$$

Esaminiamo i casi che si possono presentare a seconda del valore di $\sin\beta$, ricordando che deve risultare $0 < \sin\beta \leq 1$, altrimenti β non esiste.

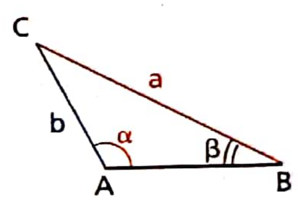
1. $\sin\beta = 1 \rightarrow \beta = 90°$. Distinguiamo due casi:
   - se $\alpha \geq 90°$, il problema non ha soluzioni;
   - se $\alpha < 90°$, il problema ammette una sola soluzione (figura **a**).
2. $0 < \sin\beta < 1$: in questo caso si hanno due soluzioni, β_1 e β_2, tra loro supplementari, per esempio β_1 acuto e β_2 ottuso.
   Per sapere se questi valori sono accettabili, dobbiamo considerare α, a e b.
   - Se $\alpha \geq 90°$, la soluzione β_2 non è accettabile perché un triangolo non può avere due angoli ottusi. Accettiamo solo β_1 acuto; il problema ammette una sola soluzione (figura **b**).
   - Se $\alpha < 90°$ e $b > a$, allora, poiché a lato maggiore sta opposto angolo maggiore, è $\beta_1 > \alpha$ e $\beta_2 > \alpha$; entrambe le situazioni sono accettabili: il problema ammette due soluzioni (figure **c** e **d**).
   - Se $\alpha < 90°$ e $b < a$, allora $\beta < \alpha$, per cui β_2, che è ottuso, non è accettabile e abbiamo per soluzione solo β_1.

Per finire, dopo aver calcolato β, determiniamo $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ e poi calcoliamo la misura del terzo lato, applicando il teorema dei seni:

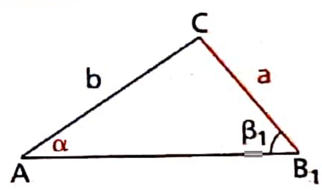
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \rightarrow \quad c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$



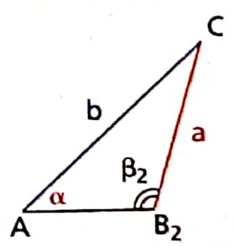
a



b



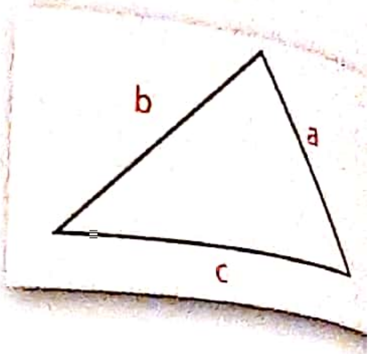
c



d

Sono noti i tre lati

Conoscendo a, b e c, determiniamo α, β e γ.



Ricaviamo α applicando il teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \rightarrow$$

$$2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Troviamo poi α con la funzione arcocoseno.

Allo stesso modo, ricaviamo β con la funzione arcocoseno, utilizzando:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \rightarrow \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Ricaviamo γ per differenza:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta).$$

ESEMPIO

Consideriamo il triangolo con:

$$a = 58{,}6,\ b = 77 \text{ e } c = 70.$$

Per ricavare α possiamo sostituire, nella formula che esprime la relazione tra il coseno di un angolo e le misure dei lati del triangolo, i valori di a, b e c:

$$\cos\alpha = \frac{77^2 + 70^2 - 58{,}6^2}{2 \cdot 70 \cdot 77} = \frac{5929 + 4900 - 3433{,}96}{10780};$$

$$\cos\alpha = \frac{7395{,}04}{10780} \rightarrow \cos\alpha \simeq 0{,}686 \rightarrow \alpha \simeq \arccos 0{,}686 \simeq 47°.$$

Ricaviamo β allo stesso modo:

$$\cos\beta = \frac{58{,}6^2 + 70^2 - 77^2}{2 \cdot 58{,}6 \cdot 70} \simeq 0{,}293 \rightarrow \beta \simeq \arccos 0{,}293 \simeq 73°.$$

Ricaviamo, infine, γ per differenza:

$$\gamma \simeq 180° - (47° + 73°) = 60°.$$