Elementi di Statistica – Eventi e Probabilità

Ci sono avvenimenti che accadono con certezza mentre altri sicuramente non possono mai verificarsi, ad esempio: se un'urna contiene solo palline rosse ed estraendone una siamo sicuri che quella sia rossa e non sarà mai possibile estrarne una di colore blu. Nel primo caso definiamo l'**evento certo** nel secondo invece **l'evento è impossibile**.

Gli eventi però possono anche accadere senza alcuna certezza, esempio: se l'urna contiene sia palline rosse che blu, l'estrazione di una pallina rossa è un evento possibile ma non certo così come quello di una pallina blu. In questo caso quindi non siamo prevedere il colore della pallina estratta poiché l'estrazione è casuale. Il fatto che un evento possa accadere o meno in modo casuale è detto **evento aleatorio.**

Il fatto che certi eventi siano aleatori ha portato l'uomo a formulare delle scommesse sul fatto che questi accadessero o meno, il concetto di probabilità nasce proprio per effetto dei giochi d'azzardo: supponiamo di avere due mazzi di carte, mazzo A e mazzo B.

A contiene 10 carte con figure e 3 carte senza figure

B contiene 12 carte con figure e 6 carte senza figure

Supponiamo ora di dover scegliere una carta da uno dei due mazzi e di vincere solo se la carta estratta è una figura. A questo punto dovremmo chiederci da quale mazzo conviene estrarre la carta? Tale scelta è paragonabile ad un esperimento che ha carattere aleatorio poiché il risultato non dipende da una regola precisa ma è imprevedibile. Chiamiamo **casi possibili** tutti i risultati che possono verificarsi:

per il mazzo A i casi possibili sono 13

per il mazzo B i casi possibili sono 18

a questo punto distinguiamo i **casi favorevoli** e cioè quelli che ci farebbero vincere e poiché per vincere dobbiamo estrarre una carta con figura, i casi favorevoli in questo caso sono tanti quanti le carte con le figure e cioè 10 per A e 12 per B. Consideriamo il rapporto fra i casi favorevoli e quelli possibili:

Mazzo A: $\frac{10}{13}$ Mazzo B: $\frac{12}{18}$

Poiché il rapporto 10/13 è maggiore del rapporto 12/18 allora ci converrà scegliere dal mazzo A.

Il rapporto tra $\frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$ fornisce la stima sulla possibilità che si verifichi un determinato evento e viene chiamato **probabilità** di quell'evento. Possiamo quindi definire la Probabilità di un evento come il quoziente tra il numero di casi favorevoli f e quello di tutti i casi possibili:

$$p\ (E) = \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{u}}$$

- Se un evento è impossibile, abbiamo detto che il numero dei casi favorevoli è pari a 0, quindi:

$$p\ (E) = \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{u}} = \frac{0}{\mathrm{u}} = 0$$

quindi la probabilità di un evento impossibile è uguale a 0.

- Se un evento è certo, il numero dei casi favorevoli è pari al numero dei casi possibili:

$$p\,(E) = \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{u}} = \frac{\mathrm{u}}{\mathrm{u}} = 1$$

quindi la probabilità di un evento certo è uguale a 1.

In generale possiamo dire che per gli eventi aleatori il numero f dei casi favorevoli è compreso fra 0 e u, quindi la probabilità di evento aleatorio è un numero compreso fra 0 e 1:

$$\frac{0}{\mathrm{u}} < \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{u}} < \frac{\mathrm{u}}{\mathrm{u}} \;\text{ ossia }\; 0 < p < 1$$

Eventi compatibili ed eventi incompatibili

Supponiamo di avere un'urna con 12 biglie numerate da 1 a 12 e consideriamo i seguenti eventi:

E_1 { $esce\ un\ numero\ pari$ }

E_2 { $esce\ un\ numero\ maggiore\ di$ 7 }

questi due eventi possono verificarsi contemporaneamente ad esempio estraendo la biglia con il numero 10, in questo caso si dice che gli eventi sono **compatibili**. I casi favorevoli affinchè si verifichi E_1 sono { 2, 4, 6, 8, 10, 12 } mentre quelli che si verifichi E_2 { 8, 9, 10, 11, 12 } è possibile anche definire l'unione tra i due eventi compatibili corrispondenti all'evento cercato:

$$E = E_1 \cup E_2 = \{\ esce\ un\ numero\ pari\ o\ maggiore\ di\ 7\ \}$$

i casi farevoli però non sono 11 ma solo 8 e ciò è dovuto al fatto che ci sono casi farevoli ad entrambi gli eventi e 3 degli eventi in E_1devono essere esclusi, quindi è possibile calcolare la probablità dell'evento unione come:

$$p\,(E) = \frac{(6+5) - 3}{12} = \frac{2}{3} = p\,(E_1) + p\,(E_2) - p\,(E_1 \cap E_2)$$

Consideriamo invece ora gli eventi:

E_3 { $esce\ un\ numero\ multiplo\ di$ 5 }

E_4 { $esce\ un\ numero\ multiplo\ di$ 3 }

Questi due eventi invece non possono verificarsi contemporaneamente pertanto sono chiamati **incompatibili.** I casi favorevoli affinchè si verifichi E_3 sono { 5, 10 } mentre quelli che si verifichi E_4 sono { 3, 6, 9, 12 } è possibile, considerando il loro evento unione determinare la probabiltà come la somma delle probabilità di ciascun evento:

$$E = E_3 \cup E_4 = \{\ esce\ un\ numero\ multiplo\ di\ 5\ o\ di\ 3\ \}$$

$$p\ (E) = \frac{2}{12} + \frac{4}{12} = \frac{6}{12} = p\ (E_3) + p\ (E_4)$$

quindi se due eventi sono incompatibili, la probabilità del loro evento unione è pari alla somma delle loro probabilità.

La probabilità che un certo evento di verifichi però può anche condizionata dal verificarsi di un altro evento, e in questo caso come calcolarne la probabilità?

Consideriamo ancora la nostra urna con all'interno le 12 biglie numerate da 1 a 12 e i seguenti eventi:

$E_1 \{ esce\ un\ numero\ \text{multiplo di } 3 \}$

$E_2 \{ esce\ un\ numero\ minore\ di\ 9 \}$

$E = E_1 \cup E_2$ = $\{3, 6, 9, 12, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

La probabilità $p\ (E_1)$ = $\frac{1}{3}$ mentre la probabilità $p\ (E_2) = \frac{2}{3}$

Supponiamo ora che un amico estragga un numero e che senza farcelo vedere ci dica che è minore di 9 e che cioè si è verificato l'evento E_2. Cosa possiamo dire ora sulla probabilità che si verifichi l'evento E_1 e cioè sulla probabilità che il numero estratto sia un ultiplo di 3 dato che tale evento è stato condizionato dall'evento E_2?

Chiamiamo $p\ (E_1 |\ E_2\ )$ la probabilità di E_1 condizionata a E_2

Per calcolare la probabilità condizionata dobbiamo prendere in considerazione un nuovo evento unione poiché i casi favorevoli in E_1 non sono più 4 bensì 2 dato che l'evento E_2 si è verificato. Quindi E = $E_1 \cap E_2$ = { 9, 12, 1, 2, 4, 5, 7, 8 } di conseguenza la prpbabilità di E_1 condizionata a E_2 sarà pari a:

$$p\ (E_1 |\ E_2\ ) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

La probabilità di E_1 è di $\frac{1}{3}$ mentre la probabilità di E_1 condizionata a E_2 è pari a $\frac{1}{4}$ quindi:

$p\ (E_1)\ \ p\ (E_1 |\ E_2\ )$

I due eventi si dicono **dipendenti.**