Appunti di Matematica per il V LICEO

Settimana dal 09/03/2020 al 13/03/2020

Martedì 10

Avevamo definito i punti di flesso e la concavità delle funzioni, ora vedremo dei criteri per determinarli.

Teorema 1. *Sia $y = f(x)$ una funzione definita e continua in un intorno completo I del punto x_0, insieme con le sue derivate prima e seconda. Se in x_0 vale $f''(x_0) \neq 0$, il grafico della funzione volge in x_0:*

- *la concavità verso l'alto se $f''(x_0) > 0$;*
- *la concavità verso il basso se $f''(x_0) < 0$.*

Enunciamo ora una condizione necessaria ma non sufficiente per l'esistenza di un flesso, nei quali ricordiamo che si ha un cambio di concavità.

Teorema 2. *Sia $y = f(x)$ definita in un intervallo $[a; b]$ e in tale intervallo esistano le sue derivate prima e seconda. Se $f(x)$ ha un flesso nel punto x_0, interno ad $[a; b]$, la derivata seconda della funzione in quel punto si annulla cioè: $f''(x_0) = 0$.*

Osservazione 3. Se in x_0 la funzione non è derivabile, non è possibile applicare il teorema precedente, ma nel punto può esserci ugualmente un flesso. In particolare, se

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = +\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x\to x_0} f'(x) = -\infty,$$

nel punto x_0 c'è un flesso verticale rispettivamente discendente oppure ascendente.

Un altro metodo per trovare i punti di flesso è effettuare lo studio del segno della derivata seconda.

Teorema 4. *Sia $y = f(x)$ una funzione definita e continua in un intorno completo I del punto x_0 e in tale intorno esistano le sue derivate prima e seconda per ogni $x \neq x_0$. Se per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno si ha*

- $f''(x_0) > 0$ *per* $x < x_0$ *e* $f''(x_0) < 0$ *per* $x > x_0$*, oppure*
- $f''(x_0) < 0$ *per* $x < x_0$ *e* $f''(x_0) > 0$ *per* $x > x_0$

allora x_0 è un punto di flesso.

Osservazione 5. Se $f(x)$ è dotata di derivate prima e seconda continue, i punti di flesso sono da ricercarsi tra le soluzioni di $f''(x) = 0$.

In sintesi:

Data una funzione $f(x)$, continua e derivabile, per la ricerca dei flessi:

- calcoliamo la derivata seconda $f''(x)$ e determiniamo il suo dominio;
- studiamo il segno di $f''(x)$ e cerchiamo i punti in cui la concavità cambia, ossia i punti di flesso
- se x_0 è un punto di flesso e:
  - $f'(x_0) = 0$ il flesso è orizzontale
  - $f'(x) \neq 0$ il flesso è obliquo
  - se la funzione non è derivabile in x_0 allora in x_0 c'è un flesso verticale.

Giovedì 12

Determinare i punti di massimo,minimo e flesso delle seguenti funzioni

- $y = 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 18x + \frac{1}{2}$
- $y = 6x^4 - 12x^2 + 6$
- $y = \sqrt[3]{(x-1)}$
- $y = 3 + \frac{1}{3}\ln(x^2 + 2x - 2)$
- $e^{\frac{2+x}{x-1}}$

Venerdì 13

Finalmente siamo in grado si svolgere uno studio di funzione completo. Vedere pagine seguenti, fonte:

https://www.unirc.it/documentazione/materiale_didattico/1465_2016_416_24662.pdf

Guida per eseguire uno studio di funzione:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

Lo studio di tale funzione ricalca quello adatto ad ogni altra funzione.

Per rendere più comprensibili i vari passaggi, essi sono stati suddivisi in vari "*passi*" successivi.

PASSO 1

- **Ricerca del dominio (o del campo di esistenza):**

Devo escludere tutti i valori della x che non mi permettono di calcolare la y corrispondente.

Nel nostro caso sarà: $x - 2 \neq 0$ cioè $x \neq 2$, infatti è impossibile calcolare un rapporto con denominatore nullo.

Il dominio sarà tutto l'asse dei numeri reali escluso x = 2, cioè $D = R - \{2\}$.

PASSO 2

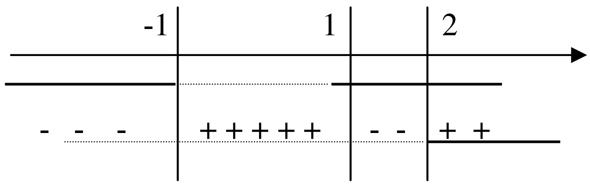
- **Ricerca dei valori della x per cui y è positivo:**

Basta risolvere la disequazione y > 0 . Nel nostro caso:

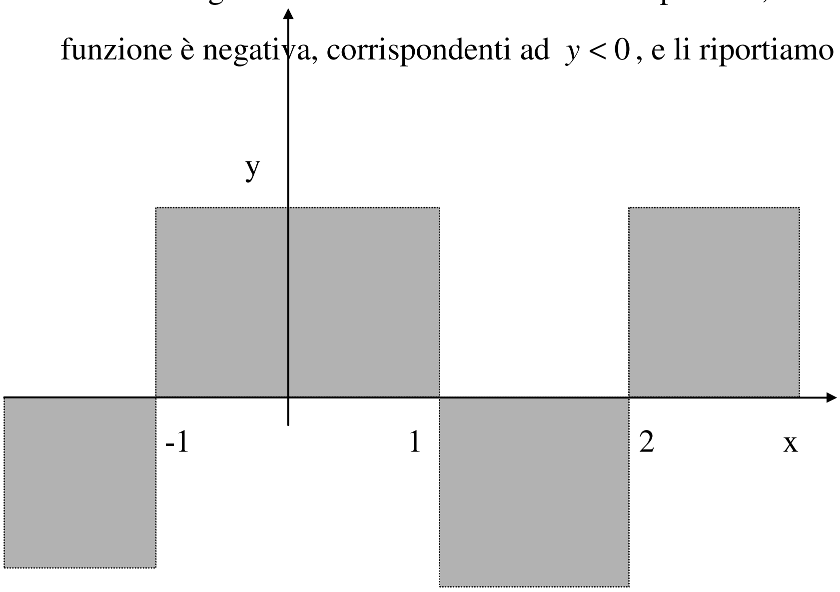
$$\frac{x^2 - 1}{x - 2} > 0$$

$Numeratore: x^2 - 1 > 0 \rightarrow x < -1 \vee x > 1$

$Denominatore: x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$



Otteniamo gli intervalli in cui la funzione è positiva, corrispondenti ad $y > 0$, e quelli in cui la funzione è negativa, corrispondenti ad $y < 0$, e li riportiamo sul grafico cartesiano:



In grigio le zone del piano cartesiano in cui è previsto il grafico.

PASSO 3

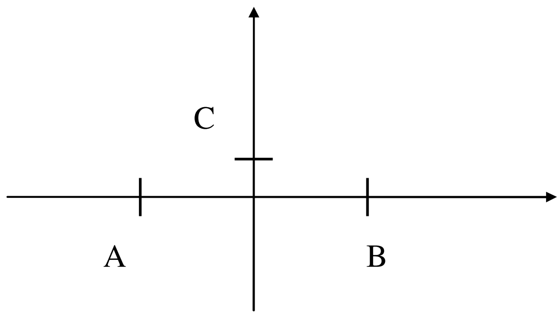
- **Ricerca intersezioni con gli assi:**

Ponendo y = 0 ottengo le intersezioni con l'asse x:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{quindi} \quad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Ponendo x = 0 ottengo le intersezioni con l'asse y :

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$



Ho quindi ottenuto i tre punti riportati sul grafico: A(-1,0) , B(1,0) , C(0,1/2).

PASSO 4

- **Ricerca dei limiti agli estremi del campo di esistenza e determinazione degli asintoti:**

Si cercano i valori dei limiti per x che tende a $\pm\infty$ ed i limiti destro e sinistro per x che tende ai valori non compresi nel dominio.

Resta inteso ovviamente che se la funzione e` definita solo per x > di c , dove c è un numero, è inutile la ricerca del limite per x che tende a meno infinito. Stesso discorso per $+\infty$ se la funzione e` definita per x < c .Vediamo il nostro caso:

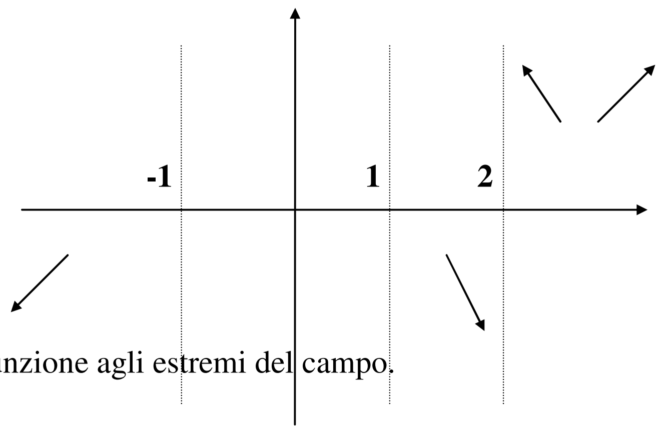
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x^2})}{x(1 - \frac{2}{x})} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x^2})}{x(1 - \frac{2}{x})} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

Nel grafico è riportato l'andamento della funzione agli estremi del campo.



La funzione ha un asintoto verticale di equazione x = 2 ma non ha un asintoto orizzontale, devo pertanto cercare l'asintoto obliquo, che avrà equazione del tipo y = m x + q.

Poiché $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ sarà $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x-2}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2-2x} = 1$

Invece $q = \lim_{x\to\infty}[f(x)-x]$ per cui $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-1}{x-2}-x\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1-x^2+2x}{x-2} = 2$.

L'asintoto obliquo ha equazione y = x + 2.

PASSO 5

- **Studio della derivata prima per ricercare massimi e minimi:**

Dopo aver calcolato la derivata prima, la pongo uguale a zero. Le soluzioni dell'equazione danno i valori della x in cui la funzione può assumere massimi o minimi.

$$y' = \frac{2x(x-2)-(x^2-1)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$$

Ponendo ora y = 0 trovo le x in cui ho i punti di massimo e minimo:

$x^2-4x+1=0 \Rightarrow x_1 = 2+\sqrt{3}$ e $x_2 = 2-\sqrt{3}$

Sostituendo tali valori nella funzione da studiare ottengo le y corrispondenti:

$$y_1 = \frac{(2+\sqrt{3})^2-1}{2+\sqrt{3}-2} = 4+2\sqrt{3} \cong 7.46$$

Sostituendo $x_2 = 2-\sqrt{3}$ ottengo $y_2 = 4-2\sqrt{3} \cong 0.54$

Studio il segno della derivata prima:

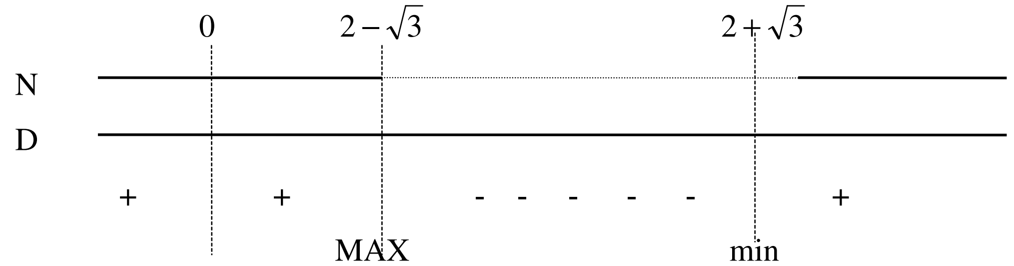
$$y' = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2} > 0$$

Ovviamente il denominatore, essendo un quadrato, è sempre > 0.

Il denominatore è x^2 -4x + 1 > 0 da cui ottengo $x < 2-\sqrt{3} \vee x > 2+\sqrt{3}$

.

Facendo il grafico:



PASSO 6

- **Studio della derivata seconda:** *(Ricerco eventuali flessi)*

Si calcola la derivata seconda, la si pone uguale a zero e si trovano gli eventuali punti di flesso.

$$y''=\frac{(2x-4)(x-2)^2-2(x-2)(x^2-4x+1)}{(x-2)^4}=\frac{6x-12}{(x-2)^4}$$

Poniamo $y''=0$ ed otteniamo : 6x - 12 = 0 da cui x = 2.

Notiamo però che x = 2 non fa parte del dominio quindi non esistono flessi.

Studio il segno della derivata seconda ponendola maggiore di zero.

Poiché $y''>0$ per x>2 , in tale intervallo la concavità è rivolta verso l'alto, per x<2 è invece rivolta verso il basso (essendo $y''<0$).